Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. Georg Schnitger
Dipl. Inf. Bert Besser

Arbeitsgruppe Theoretische Informatik, Institut für Informatik

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Übungsblatt 7

Ausgabe: 09.12.2013
Abgabe : 16.12.2013 **vor** Vorlesungsbeginn

7.1. Aufgabe (5+5) *Variablen flippen*

Im MAX-2-SAT Problem ist ein Menge von Klauseln mit jeweils genau 2 Literalen gegeben. Gesucht ist eine Belegung der Variablen, so dass die Anzahl der erfüllten Klauseln maximiert wird. Die trivialen Klauseln $(x_i \vee \overline{x_i})$, $(x_i \vee x_i)$ sowie $(\overline{x_i} \vee \overline{x_i})$ kommen nicht vor.

Für die Variablen $x_1, \ldots, x_k$ fassen wir ihre Belegung als einen Vektor $x \in \{0,1\}^k$ auf. Als Umgebung von x definieren wir die 1-Flip-Nachbarschaft $U(x) = \{y \,:\, \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| = 1\}$. Wir betrachten eine strikte lokale Suche in der wir eine Variable genau dann negieren dürfen, wenn sich dadurch die Anzahl der erfüllten Klauseln erhöht.

a) Zeige: Der Approximationsfaktor ist mindestens $\frac{1}{2}$ unabhängig von der Anfangslösung.
Hinweis: Betrachte eine beliebige Belegung für die weniger als die Hälfte aller Klauseln erfüllt sind und zeige, dass ein verbessernder Flip existiert.

b) Konstruiere eine Instanz von MAX-2-SAT über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$, so dass ein lokales Optimum lok mit möglichst großem Quotienten $\frac{\text{opt}}{\text{lok}}$ existiert.

7.2. Aufgabe (7+7) *Die Schwierigkeit der lokalen Suche*

a) Gegeben sei das PLS-Problem $P = (\min, f, L, A, B)$. Im *Standardproblem für P* ist das vom Standardalgorithmus für Instanz x berechnete lokale Optimum s zu berechnen. Was ist die Eigenschaft von s? Wir erhalten s, wenn wir B solange auf die Anfangslösung $A(x)$ anwenden bis ein lokales Minimum, nämlich s, gefunden ist. Beachte, dass wir zur Lösung des Standardproblems nicht auf das Vorgehen des Standardalgorithmus angewiesen sind.

Konstruiere ein PLS-Problem $P = (\min, f, L, A, B)$ so, dass wir SAT mit einem effizienten Algorithmus $\mathcal{A}$ lösen können, wobei $\mathcal{A}$ kostenfrei eine Subroutine zur Lösung des Standardproblems für P verwenden darf.

Hinweis: Fasse eine Variablenbelegung als binäre Zahl auf. Entwerfe P so, dass die Erfüllbarkeit der Eingabeformel entschieden wird.

> Es gibt also PLS-Probleme mit „NP-hartem“ Standardproblem.

b) Zeige: Wenn wir eine NP-vollständige Sprache L effizient lösen können, indem wir für ein PLS-Problem P kostenfrei *irgendein* lokales Minimum erfragen dürfen (möglicherweise für mehrere Instanzen), dann gilt NP = coNP.

   Hinweis: Beachte, dass die effizente Lösung keinerlei Annahmen über die erhaltenen lokalen Minima machen darf, vielmehr muss die Lösung für alle möglichen lokalen Minima funktionieren. Es genügt zu zeigen, dass die Komplementsprache von L in NP liegt.

Die Schwierigkeit der Bestimmung *irgendeines* lokalen Optimums kann also wahrscheinlich nicht mit Hilfe der NP-Vollständigkeit nachgewiesen werden. Dieser Fakt ist Begründung für die Definition der Klasse PLS einerseits wie auch des Konzepts der PLS-Vollständigkeit andererseits.