Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2017

Georg Schnitger
Philipp Tertel
Hung The Tran

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übung 2

Ausgabe: 02.05.17
Abgabe: 09.05.17

Aufgabe 2.1. ***Hopcrofts Algorithmus: Eine Iteration*** (3+3+3 Punkte)

Wir wenden Hopcrofts Algorithmus auf einen DFA $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ an und suchen eine Datenstruktur, die eine möglichst effiziente Implementierung erlaubt.

Wir fixieren einen Buchstaben $c \in \Sigma$. In einer Iteration wählt Hopcrofts Algorithmus eine Klasse Y in Check aus, entfernt sie aus Check, bestimmt alle von Y zerlegten Klassen $X \in Z$ und führt die Ersetzungen – in Z und gegebenenfalls in Check – von X durch die Kinderklassen $X \cap \delta_c^{-1}(Y)$ und $X \setminus \delta_c^{-1}(Y)$ aus.

Die Datenstruktur sollte ***unter anderem*** die folgenden Informationen bereitstellen:

- Für jede Klasse X,
  - die Größe von X,
  - eine Hash-Tabelle aller Elemente $q \in X$ mit $\delta_c^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$
- Informationen über die Klassen der aktuellen Zerlegung Z sowie über die Klassen in Check müssen schnell abrufbar und pflegbar sein.
- Für jeden Zustand $q \in Q$ sollte man auf alle Zustände in $\delta_c^{-1}(\{q\})$ in Linearzeit – also in Zeit $\mathcal{O}(|\delta_c^{-1}(\{q\})|)$ – zugreifen können.
- Sie werden möglicherweise weitere Informationen zur Verfügung stellen und pflegen müssen.

Sei $n := |Q|$.

(a) Beschreiben Sie, wie Sie Ihre Datenstruktur initialisieren. Bestimmen Sie die benötigte Laufzeit in Abhängigkeit von n und $|\Sigma|$.

(b) Eine Menge Y wird aus Check entfernt und muss für den Buchstaben $c \in \Sigma$ in Zeit $\mathcal{O}(|\delta_c^{-1}(Y)|)$ verarbeitet werden.

1. Beschreiben Sie für jeden Zustand $q \in Y$, wie Sie Ihre Datenstruktur benutzen und aktualisieren. Zeigen Sie, dass Laufzeit $\mathcal{O}(|\delta_c^{-1}(q)|)$ ausreicht.
2. Wie bestimmen Sie die Kinderklassen einer durch Y zerlegten Klasse X? Wie initialisieren Sie die Datenstruktur für die beiden Kinderklassen? Welche Laufzeit benötigen Sie?
   Hinweis: Um die Laufzeit $\mathcal{O}(|\delta_c^{-1}(|Y|)|)$ einhalten zu können, sollten Sie die für die Verarbeitung von X benötigte Laufzeit mit den Zustandsübergängen $\delta(p, c) = q$ „bezahlen", wobei $p \in X$ und $q \in Y$.

Aufgabe 2.2. ***Der Nerode-Automat*** (3+3 Punkte)

a) Seien L_1 und L_2 zwei reguläre Sprachen. Mit Hilfe des Produktautomaten haben wir

$$\text{Index}(L_1 \cap L_2) \leq \text{Index}(L_1) \cdot \text{Index}(L_2)$$

gezeigt. Ist es möglich, die Konstruktion des Produktautomaten zu verbessern? Um diese Frage zu beantworten, definieren wir für teilerfremde Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$

$$L_1 := \{1^m \ : \ r \text{ teilt } m\},\ L_2 := \{1^m \ : \ s \text{ teilt } m\} \text{ und } L := L_1 \cap L_2.$$

- Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\equiv_L$. D.h. bestimmen Sie Worte $w_1, \ldots, w_N \in \{1\}^*$, so dass $w_i \not\equiv_L w_j$ für alle $i \neq j$ gilt und so dass es zu jedem beliebigen Wort $w \in \{1\}^*$ ein i mit $w \equiv_L w_i$ gibt.
- Bestimmen Sie den Nerode-Automaten N_L für L. Eine Begründung ist nicht erforderlich.
- Bestimmen Sie $\text{Index}(L_1)$, $\text{Index}(L_2)$ und $\text{Index}(L)$. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

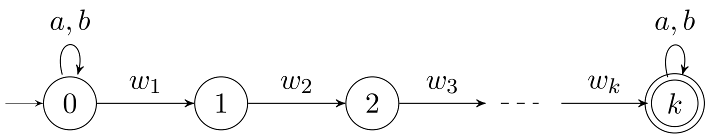
b) Es sei

$$L := \{ww^{\textbf{reverse}} \ : \ w \in \{a,b\}^*\}.$$

Bestimmen Sie die Zerlegung von $\{a,b\}^*$ in seine Nerodeklassen.

Aufgabe 2.3. ***Potenzmengenkonstruktion*** (3+6 Punkte)

Für das Wort $w := w_1 \cdots w_k \in \{a,b\}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $w_1, \ldots, w_k \in \{a,b\}$ betrachten wir den unten stehenden NFA $A_w = (\Sigma, Q_w, q_0, \delta_w, F_w)$, der ein Wort $u \in \{a,b\}^*$ genau dann akzeptiert, wenn w ein Teilwort von u ist:



Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion für A_w durch, um einen äquivalenten DFA B_w zu erhalten: Beginnen Sie mit dem Anfangszustand $\{q_0\}$ und fügen Sie neue Zustände nur dann ein, wenn Sie als Nachfolgezustände benötigt werden.

a) Sei $w = abaaba$. Beschreiben Sie alle Teilmengen, die als Zustände von B_w auftreten.

b) Sei w ein beliebiges Wort über dem Alphabet $\{a,b\}$. Beschreiben Sie alle Teilmengen, die als Zustände von B_w auftreten. Begründen Sie Ihre Antwort.